Modèles de graphes réguliers / surfaces hyperboliques aléatoires (2)

Graphes d-réguliers aléatoires à N sommets ($N \to \infty$)

→ $\mathcal{G}_{N,d}$ modèle de permutations (d pair) (Friedman)

→ $\mathcal{P}_{N,d}$ modèle de configuration (Bollobas)

• $\mu_2 < d$ première valeur propre non triviale

$$2\sqrt{d-1} - O\left(\frac{1}{(\log N)^2}\right) \leq \mu_2 \leq 2\sqrt{d-1} + \varepsilon$$

Alon-Boppana
Friedman

avec $\mathbb{P} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$ (Friedman)

$h(G_N)$ constante de Cheeger

$$i^*(d) + o(1) \leq h(G_N) \leq \frac{d}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

avec $\mathbb{P} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$
(Bollobas)

toujours

- Diamètre : dans l'arbre (infini) d-régulier

$$\# B(x_0, R) = 1 + d + d(d-1) + \dots + d(d-1)^{R-1}$$
$$= 1 + \frac{d(d-1)^R - 1}{d-2}.$$

Csq : pour un graphe d-régulier à N sommets,

$$1 + \frac{d(d-1)^D - 1}{d-2} \geqslant N \quad \text{où } D \text{ diamètre du graphe}$$

Donc $\quad D \geqslant \log_{d-1} N + c(d).$

Bollobas – De La Vega 1982 : pour les graphes aléatoires, avec $\mathbb{P} \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$, $\operatorname{diam}(G_N) = \log_{d-1} N + \log_{d-1}(\log N) + O(1)$.

- Lien entre trou spectral et diamètre

<u>Proposition :</u> $\operatorname{diam}(G_N) \leqslant \dfrac{\log N}{\log\left(\frac{d}{\mu_2}\right)}$.

<u>Preuve :</u> A matrice d'adjacence. Pour toutes fonctions $f_0, g_0 : V(G_N) \to \mathbb{C}$ orthogonales aux fonctions constantes pour $\langle f, g \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x \in V} \overline{f(x)}\, g(x)$,

alors $\left|\left\langle \left(\frac{A}{d}\right)^n f_0 , g_0 \right\rangle\right| \leq \left(\frac{\mu_2}{d}\right)^n \|f_0\| \, \|g_0\|$

f, g quelconques : on pose $f_0 = f - \langle f \rangle$, $g_0 = g - \langle g \rangle$

où $\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{x \in V} f(x)$. Alors on a

$$\left|\left\langle \left(\frac{A}{d}\right)^n f, g \right\rangle - \langle f \rangle \langle g \rangle\right| \leq \left(\frac{\mu_2}{d}\right)^n \|f\| \, \|g\|$$

x, y 2 sommets tq $\mathrm{dist}(x,y) = \mathrm{diam}(G_N)$, on pose $f = \delta_x$, $g = \delta_y$, $n = D-1$.

On a $\left\langle \left(\frac{A}{d}\right)^{D-1} \delta_x , \delta_y \right\rangle = 0$. De plus,

$\langle \delta_x \rangle = \frac{1}{N}$, $\|\delta_x\| = \frac{1}{\sqrt{N}}$, donc $\frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{N} \left(\frac{\mu_2}{d}\right)^{D-1}$ $\square$

- Systole (longueur de la plus petite géodésique fermée) :

On définit le rayon d'injectivité

$$\rho_{inj}(x) = \sup \{ R \text{ tq } B_{G_N}(x, R) \text{ soit un arbre} \}.$$

Pour tout x, $\rho_{inj}(x) \leq \log_{d-1}(N) + \tilde{c}(d)$

On en déduit $\text{systole}(G_N) \leq 2\log_{d-1}(N) + \tilde{c}(d)$

Erdös – Sacks : construction déterministe de graphes avec $\text{systole}(G_N) \geq \log_{d-1}(N) + O(1)$

Lubotzky – Phillips – Sarnak : $\text{syst}(G_N) \geq \frac{4}{3}\log_{d-1}(N) + O(1)$.

Remarque : les graphes aléatoires ont une petite systole.

<u>Théorème</u> (Bollobas) pour le modèle de configuration, étant donné $\ell \geq 2$, $\gamma_\ell \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{P}(\lambda_\ell)$, où

γ_ℓ = nombre de géodésiques fermées de longueur ℓ

$$\lambda_\ell = \frac{(d-1)^\ell}{2\ell}.$$

Autrement dit, $\forall k$, $\mathbb{P}(\gamma_\ell = k) \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-\lambda_\ell}\frac{\lambda_\ell^{-k}}{k!}$

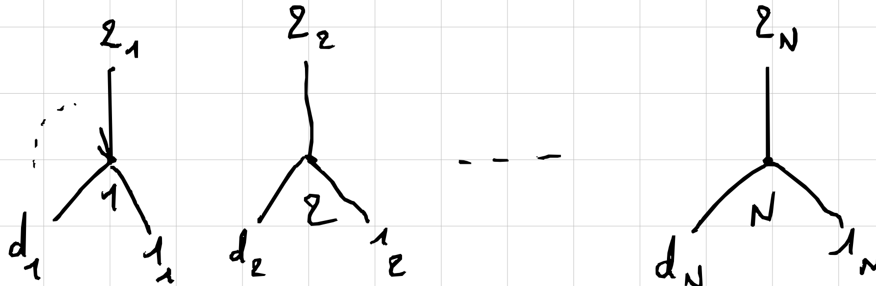
Preuve : méthode des moments factoriels. Pour m entier

$\mathbb{E}_N\left[Y_\ell(Y_\ell-1)\cdots(Y_\ell-m+1)\right]$ moment factoriel d'ordre m.

On va montrer que ce moment converge vers λ_ℓ^m (moment factoriel de la loi de Poisson).

En particulier, $\mathbb{E}_N(Y_\ell) \xrightarrow[N\to\infty]{} \lambda_\ell$.

Rappel sur le modèle de config.



Appariement "parfait" des demi-arêtes i_j deux à deux.
Soit $v \leq N$. On appelle sous-configuration $\bar{H}$ avec e arêtes sur les sommets numérotés $\{1, \ldots, v\}$ la donnée d'un appariement partiel de $2e$ demi-arêtes. De manière équivalente, on a un graphe H de sommets $\{1, \ldots, v\}$ avec e arêtes, et des "étiquettes" qui indiquent de quelle demi-arêtes elles proviennent.

Si $(x_1, \dots, x_v)$ v-uplet de sommets distincts de $\{1, \dots, N\}$, on note $\bar{H}(x_1, \dots, x_v)$ la même configuration sur les sommets $\{x_1, \dots, x_v\}$.

$$\mathbb{E}_N\left(\text{nb de configurations du modèle } P_{N,d} \text{ isomorphes à } \bar{H}\right)$$

$$= \sum_{\substack{(x_1, \dots x_v) \\ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}}} \underbrace{\mathbb{P}_N\left(\bar{H}(x_1, \dots, x_v) \text{ est réalisée}\right)}_{= \frac{(Nd-2e-1)!!}{(Nd-1)!!}}.$$

Donc $\mathbb{E}[\dots] = N(N-1)\dots(N-v+1)\dfrac{(Nd-2e-1)!!}{(Nd-1)!!}$

$$\underset{N\to\infty}{\sim} \frac{1}{d^e} N^{v-e}$$

Or* $v-e = 1-b(H)$ invariant topologique du graphe,

où $b(H)$ = rang cyclique du graphe H
= nb minimum d'arêtes à retirer pour obtenir un arbre.

---

* si H connexe

$\mathbb{E}_N$(nb de sous-graphes isomorphes à H (en oubliant les numérotations))

$$= \frac{1}{\#\{\text{automorphismes de } H\}} \sum_{\substack{\text{toutes les}\\ \text{sous-config. qui}\\ \text{donnent le même graphe}}} N(N-1)\cdots(N-v+1)\,\frac{(Nd-2e-1)!!}{(Nd-1)!!}$$

À retenir : si $b(H) \geq 2$, et H connexe,

$$\mathbb{E}[\text{nb de sous-graphes} \sim H] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

avec une vitesse en $\frac{1}{N^{b(H)-1}}$

Conséquence : (à ℓ fixé),

$\mathbb{E}_N$(nb de géodésiques fermées de longueur ℓ)

$= \mathbb{E}$[nb de géod. simples fermées de longueur ℓ) $+ O(\frac{1}{N})$

$$= \frac{1}{2\ell} \underbrace{(d(d-1))^{\ell}}_{\text{nb d'étiquettes possibles pour les demi-arêtes}} \frac{1}{d^{\ell}} N^{\overset{v-\ell}{0}} \qquad = \frac{(d-1)^{\ell}}{2\ell}.$$

Calculs analogues pour les moments factoriels supérieurs.

$Y_\ell(Y_\ell - 1)\cdots(Y_\ell - m+1)$ = nb de m-uplets $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ où γ_i géodésique fermée de longueur ℓ.

$$\mathbb{E}_N[Y_\ell(Y_\ell-1)\cdots(Y_\ell-m+1)]$$

$= \mathbb{E}_N$[nb de m-uplets $(\gamma_1, \ldots \gamma_m)$ de géodésiques <u>simples</u> qui ne se croisent pas entre elles] $+ O(\frac{1}{N})$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \left(\frac{(d-1)^\ell}{2\ell}\right)^m = \lambda_\ell^m. \quad \square$$

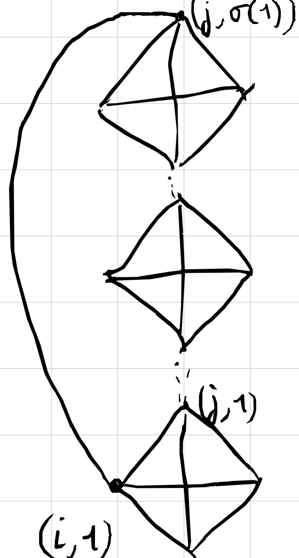
Par les mêmes techniques, pour $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_r$,

$(Y_{\ell_1}, \ldots, Y_{\ell_r}) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{P}_{\lambda_{\ell_1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}_{\lambda_{\ell_r}}$, où $\mathcal{P}_\lambda$ loi de Poisson de paramètre λ.

On peut donc conditionner par rapport à $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$ (par exemple).

Modèle de revêtement aléatoire (de graphe)

G graphe fini. On fait N copies de G



Pour chaque arête on tire au hasard un élément de $\mathfrak{S}_N$.

G, valeurs propres $\lambda_1^{old}, \dots, \lambda_{|V|}^{old}$

Thm (Bordenave - Collins) Soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}_N\left(\mathrm{dist}\left(\lambda_j^{new}, \sigma(\tilde{G})\right) \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$$

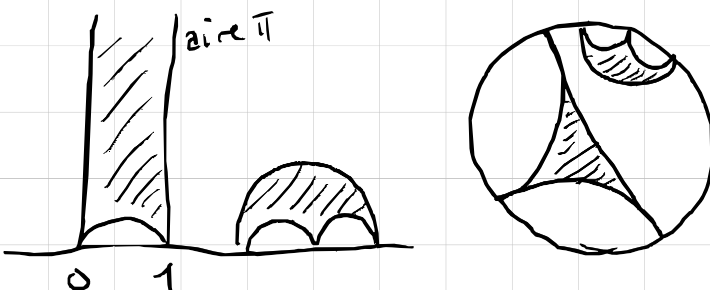
Où $\tilde{G}$ revêtement universel de G. Ex: si G est d-régulier, $\tilde{G}$ est d-régulier aussi, et $\sigma(\tilde{G}) = [-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$

Surfaces hyperboliques aléatoires

1) Modèle de Brooks-Makover (2004)

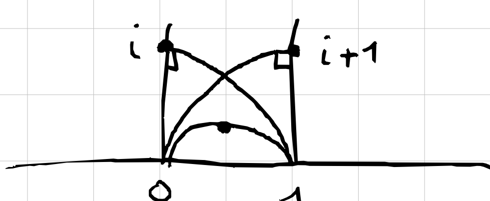
→ Modèle calqué sur les graphes 3-réguliers aléatoires.

triangle hyperbolique idéal : triangle entre 3 points de $\partial\mathbb{H}$



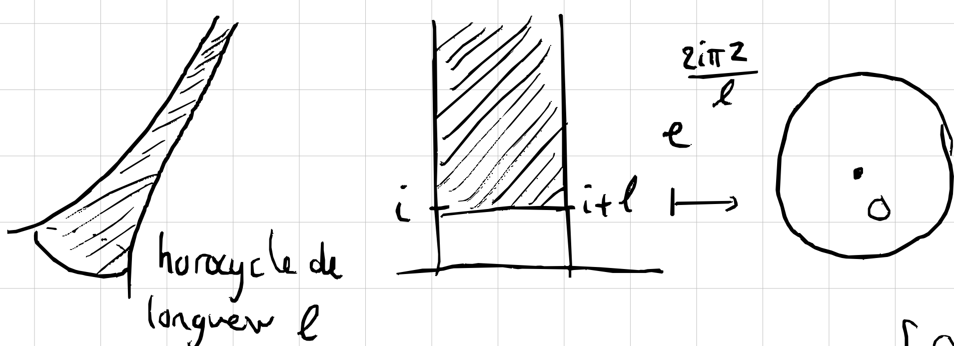
→ N triangles idéaux (orientés), N pair.

On recolle les bords au hasard de manière compatible avec l'orientation, et en faisant coïncider les bases des hauteurs (les points marqués ci-dessous en exemple)



On obtient une surface hyperbolique S^o d'aire π, non compacte, avec des cusps.

Si on veut des surfaces compactes, on procède comme suit : au voisinage d'un cusp on introduit de nouvelles cartes qui "compactifient" le cusp, et on garde les cartes d'origine en-dehors des cusps. On obtient S^c surface de Riemann compacte avec des points $p_1, \dots, p_k$ et $S^c \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ est dans la même classe conforme que S^o



S^c possède une unique métrique de courbure $K = \begin{cases} 0 & \text{si tore} \\ 1 & \text{si sphère} \\ -1 & \text{si } g \geq 2 \end{cases}$

<u>Théorème</u> (Brooks-Makover) avec $\mathbb{P} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$, S^c est connexe de genre $\sim \frac{N}{2}$, donc porte une métrique hyperbolique.

On peut montrer aussi l'existence de $C_1, C_2 > 0$ tq

$$\mathbb{P}(h(S^c) \geq C_1) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\mathbb{P}(\text{systole}(S^c) \geq C_2) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Notes ici, $h(M) = \inf\limits_{\substack{M = A \sqcup B \\ \text{partition à bord lisse}}} \dfrac{Vol_{n-1}(\partial A)}{\min(Vol_n(A), Vol_n(B))}$ pour M variété de dim n.

Inégalité de Cheeger-Buser : $\lambda_1 > 0$ 1re valeur propre non triviale de $-\Delta$.

$$\underbrace{\frac{h^2}{4} \leq}_{\text{Cheeger}} \lambda_1 \underbrace{\leq}_{\text{Buser}} 2a(n-1)h + 10h^2,$$

où $\underbrace{K \geq -(n-1)a^2}_{\text{courbure}}$

Lien entre diamètre et trou spectral (version pour les surfaces hyperboliques) - version de Michael Magee

$$\lambda_1 = \frac{1-\delta^2}{4}, \quad \rho_{inj} \geq c.$$

$$\mathrm{diam}(S) \leq \frac{2}{1-\delta} \log \mathrm{Vol}(S) + \frac{4}{1-\delta} \log\log \mathrm{Vol}(S) + \frac{4}{1-\delta}\Big(O(|\log c|) + O(1) \Big)$$

Borne de Huber (cf. Alon-Boppana-Friedman pour les graphes)

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{(\log g)^2}\right)$$

Cheeger $\Rightarrow$ $h(S) \leq 1 + O\left(\frac{1}{(\log g)^2}\right)$

Budzinshi-Curien-Petri : $\forall S$ hyperbolique en tirant "au hasard" une partition $S = A \sqcup B$,

$$h(S) \leq \frac{2}{\pi} + \underset{g \to \infty}{o(1)}.$$

<u>Théorème</u> (Petri) : soit $a < b$.

$$Y_{[a,b]} = \#\text{ géodésiques fermées de longueurs } \in [a,b]$$

$Y_{[a,b]} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{P}_\nu$ où $\nu = \nu([a,b])$, ν mesure explicite (atomique)

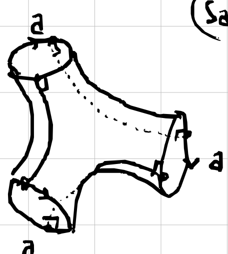
en particulier, $\forall k$, $\mathbb{P}(Y_{[a,b]} = k) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\nu} \frac{\nu^k}{k!}$

<u>Diamètre</u> S de genre g, Aire $= 4\pi(g-1)$

$\text{diam}(S^g) \geq \log \text{Aire}(S) + O(1)$ "borne triviale"

<u>Thm</u> (Budzinski - Curien - Petri) Pour le modèle de Brooks-Makover, $\text{diam}(S) \sim 2 \log \text{Aire}(S)$.

Un autre modèle de surfaces aléatoires aussi fondé sur les graphes 3-réguliers et qui optimise le diamètre est donné par un recollement aléatoire de pantalons hyperboliques (sans twists)



a fixé (et grand)

Dans ce cas, avec grande proba quand $N \to \infty$,
$\text{diam}(S) \leq (1 + \varepsilon(a)) \log(\text{Aire}(S))$

Généralisation (Joffrey Mathien) : a est pris aléatoirement et on ajoute des twists aléatoires.